

Eesti LXIX matemaatikaolümpiaad
TALLINNA KOOLIVOOR
12. jaanuaril 2023. a. Tallinnas
XI klass

Lahendamiseks on aega 4 tundi.

Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.

Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Müüki tuli uus telefonimudel. Teisel nädalal peale müügi algust vähendati telefoni hinda 10% võrra. Seejärel, kolmandal nädalal, tõsteti telefoni hinda, kusjuures nüüd oli selle hind kõrgem, kui esialgne hind. Neljandal nädalal hinda taas langetati, seekord 50% võrra. Kui mitu protsenti oli neljandal nädalal hind soodsam võrreldes esialgse hinnaga, kui on teada, et hinna vahe teisel ja kolmandal nädalal oli sama suur kui hinna vahe teisel ja neljandal nädalal ?
2. Tõestage, et võrratus $4x^4 + 3x^2 + 5 > 2x^3 + 4x$ kehtib iga $x \in \mathbb{R}$ korral.
3. Näidake, et arv $2020 \cdot 2021 \cdot 2022 \cdot 2023 + 1$ on täisruut.
4. Teravnurkse võrdhaarse kolmnurga ABC tipunurga BAC suurus on 2α kraadi. Selle kolmnurga kõrgused AD ja BE lõikuvad punktis L . (Punktid D ja E on kõrguste aluspunktid vastavatel külgedel).
 - 1) Näidake, et sellise kolmnurga ABC alusnurk on suurem poolest tipunurgast.
 - 2) Leidke lõikude LD ja AD pikkuste suhe $\frac{|LD|}{|AD|}$.
5. Põrandal on 10 müntide kuhja, igäühes neist 21 münti. Peeter ja Indrek mängivad mängu, milles nad kordamööda võtavad kuhjadest münte, kusjuures Peeter võtab oma käigu ajal münte kahest erinevast kuhjast, igäühel 4 münti (kokku 8 münti), ning Indrek võtab oma käigu ajal 13 münti ühest kuhjast. Kui kuhjas on vähem münte kui poiss peab võtma, siis sellest kuhjast ta münte võtta ei saa. Kui kõigis kuhjades on vähem münte kui poiss peab võtma, siis ta jätab oma käigu vahele. Kui kumbki poistest ei saa enam münte võtta, siis mäng lõppeb ning võidab see, kellel on rohkem münte. Kui mõlemad poisid üritavad saada nii palju münte kui on võimalik ja Peeter alustab mängu, siis kes võidab?